$\boxed{1}$

対偶法や背理法では，結論の否定が大変なので，直接示す。

$(x,y)\in A$ を満たす a,b をそれぞれ $2m-1, 2n-1$（m,n は $m<n$ の自然数）とおくと，

$\sqrt{x}=2m-1$，$\sqrt{y}=2n-1$ より，

$\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}=2(n-m)^2$，$\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2}=2(m+n-1)^2$

ここで，$2(n-m)^2=2X^2$，$2(m+n-1)^2=2Y^2$ とし，

X,Y のうち自然数であるものをそれぞれ p,q すると，

$p=n-m$ と $q=m+n-1$（$p<q$）が存在する。　・・・①

また，$\begin{cases} n-m=p \\ n+m=q+1 \end{cases}$ より，$n=\dfrac{p+q+1}{2}$，$m=\dfrac{q-p+1}{2}$ であり，

m,n は自然数だから，$p+q+1$ と $q-p+1$ が偶数であることが必要である。

よって，p と q のどちらか一方だけが奇数である。　・・・②

続いて，p と q の最大公約数を g とすると，

$p=gp', q=gq'$（p' と q' は互いに素）と表せ，

$$a=2m-1=2\cdot\frac{q-p+1}{2}-1=q-p=g(q'-p')$$

$$b=2n-1=2\cdot\frac{p+q+1}{2}-1=p+q=g(p'+q')$$

より，g は a と b の公約数である。

ところが，a と b は互いに素だから，$g=1$ であることが必要である。

よって，p と q の最大公約数は 1，すなわち p と q は互いに素である。　・・・③

①，②，③より，$\left(\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2},\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2}\right)\in B$ が成り立つ。

ゆえに，$(x,y)\in A$ ならば $\left(\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2},\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2}\right)\in B$ が成り立つ。

$\boxed{2}$

(1)

$f(x)=\dfrac{a+x}{2}\log\dfrac{x}{a}-(x-a)\ (0<a<x)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{2}\log\frac{x}{a}+\frac{a+x}{2}\cdot\frac{1}{x}-1$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{x}{a}+\frac{a-x}{2x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2x}+\frac{-2x-2(a-x)}{4x^2}$$
$$=\frac{1}{2x}+\frac{-2a}{4x^2}$$
$$=\frac{2(x-a)}{4x^2}$$

これと $x>a$ より，$f''(x)>0$

よって，$f'(x)$ は単調増加しかつ $f'(a)=0$ より，$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は単調増加しかつ $f(a)=0$ $\quad\therefore f(x)>0$

ゆえに，$0<a<x$ のとき，$\dfrac{a+x}{2}\log\dfrac{x}{a}-(x-a)>0$ が成り立つ。

(2)

$c<\dfrac{a+b}{2}$ を示す。

$f'(c)=\dfrac{1}{c}$ より，$\dfrac{1}{c}=\dfrac{\log b-\log a}{b-a}$ $\quad\therefore b-a=c(\log b-\log a)$

(1)より，$\dfrac{a+b}{2}\log\dfrac{b}{a}-(b-a)>0$

$$\therefore \frac{a+b}{2}(\log b-\log a)-(b-a)=\frac{a+b}{2}(\log b-\log a)-c(\log b-\log a)$$
$$=(\log b-\log a)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)>0$$

これと $\log b-\log a>0$ より，$\dfrac{a+b}{2}-c>0$ $\quad\therefore c<\dfrac{a+b}{2}$

$\sqrt{ab}<c$ を示す。

$$\sqrt{ab}<c \Leftrightarrow \sqrt{ab}<\frac{b-a}{\log b-\log a}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}(\log b-\log a)<b-a$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}(\log b-\log a)-b+a<0$$

よって，$\sqrt{ab}(\log b-\log a)-b+a<0$ が成り立つことを示せばよい。

$g(x)=\sqrt{ax}(\log x-\log a)-x+a\ (0<a<x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x)&=\frac{\sqrt{a}}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\log x-\log a)+\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}-1\\ &=\frac{\sqrt{a}}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\log x-\log a)+\sqrt{a}x^{-\frac{1}{2}}-1\\ &=\frac{\sqrt{a}}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\log x-\log a+2)-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x)&=-\frac{\sqrt{a}}{4}x^{-\frac{3}{2}}(\log x-\log a+2)+\frac{\sqrt{a}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}\\ &=-\frac{\sqrt{a}}{4}x^{-\frac{3}{2}}(\log x-\log a)<0 \end{aligned}$$

よって，$g'(x)$ は単調減少しかつ $g'(a)=0$

よって，$g(x)$ は単調減少しかつ $g(a)=0$　　$\therefore g(x)<0$

これと $0<a<b$ より，$\sqrt{ab}(\log b-\log a)-b+a<0$

ゆえに，$\sqrt{ab}<c$

$\boxed{3}$

(1)

解法 **1**：オーソドックスな解法

条件より，四角形 QORP は OR//QP，OQ//RP の平行四辺形である。

よって，

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$$
$$=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}$$

これと $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$， $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ap\end{pmatrix}$， $\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\br\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{pmatrix}p\\ap\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}r\\br\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x-r\\y-br\end{pmatrix}$$

$\therefore p=x-r$ ・・・①， $ap=y-br$ ・・・②

①より， $r=x-p$

これを②に代入すると， $ap=y-b(x-p)$ $\therefore (a-b)p=-bx+y$ $\therefore p=\frac{1}{a-b}(-bx+y)$

よって，

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ap\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}-bx+y\\-abx+ay\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}-b&1\\-ab&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}-b&1\\-ab&a\end{pmatrix}$$ ・・・(答)

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$ より， $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A+B)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\therefore A+B=E$

$$\therefore B=E-A$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}-b&1\\-ab&a\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}a-b&0\\0&a-b\end{pmatrix}-\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}-b&1\\-ab&a\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}a&-1\\ab&-b\end{pmatrix}$$ ・・・(答)

$$A^2=\frac{1}{(a-b)^2}\begin{pmatrix}-b & 1\\ -ab & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & 1\\ -ab & a\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}\begin{pmatrix}b^2-ab & -b+a\\ ab^2-a^2b & -ab+a^2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{(a-b)^2}\begin{pmatrix}-b(a-b) & a-b\\ -ab(a-b) & a(a-b)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}-b & 1\\ -ab & a\end{pmatrix}$$
$=A$　・・・(答)

$AB=A(E-A)$
$=A-A^2$
$=A-A$
$=O$　・・・(答)

解法 2：面積の利用

平行四辺形 QORP の面積＝2×△QOP

および $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ ap\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ br\end{pmatrix}$ より，

$|pbr-apr|=2\cdot\frac{1}{2}|xap-yp|$　$\therefore |pr||a-b|=|p||ax-y|$

点 P は $y<ax$ を満たす領域に存在しかつ点 Q と点 R は第 1 象限の点であることより，

$pr(a-b)=p(ax-y)$　$\therefore r=\frac{1}{a-b}(ax-y)$

$$\therefore \begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ br\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}ax-y\\ b(ax-y)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}a & -1\\ ab & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$\therefore B=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}a & -1\\ ab & -b\end{pmatrix}$　・・・(答)

以下略

補足

平行四辺形 QOPR の面積＝辺 QO と辺 OP を隣合う 2 辺とする平行四辺形の面積

および $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ ap\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ br\end{pmatrix}$ より，$|pbr-apr|=|xap-yp|$

でもよい。

(2)

条件より，$\mathrm{P}_{n+1} = \frac{1}{3}(\mathrm{Q}_n + 2\mathrm{R}_n)$，$\mathrm{Q}_n = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$，$\mathrm{R}_n = B\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(A+2B)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n (A+2B)^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3^n}\{(E-B)+2B\}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3^n}(E+B)^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

ここで $(E+B)^n$ について，

$$(E+B)^n = \sum_{k=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k B^k E^{n-k} + B^n + E^n$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k B^k + B^n + E$$

$$B^2 = (E-A)^2$$
$$= E^2 - 2A + A^2$$
$$= E - 2A + A$$
$$= E - A$$
$$= B$$

$B^k = B$ とすると，$B^{k+1} = B^k \cdot B = B^2 = B$

よって，$B^n = B$ （$n = 1,2,\cdots$）が帰納的に成り立つ。

$$\therefore (E+B)^n = \sum_{k=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k B + B + E$$
$$= B\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k + E$$
$$= B\left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k - 1\right) + E$$
$$= B\{(1+1)^n - 1\} + E$$
$$= B(2^n - 1) + E$$
$$= (E-B) + 2^n B$$
$$= A + 2^n B$$

よって，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n}(A + 2^n B)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ・・・(答)

補足 1

$(E+B)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k B^k E^{n-k}$ とはせず，$(E+B)^n=\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k B^k E^{n-k}+B^n+E^n$ とした理由

正方行列の 0 乗は正則であろうとなかろうと E と定義されるらしいが，

それを用いてよいものかどうか，，，

ということで，${}_n\mathrm{C}_0 B^0 E^n$ と ${}_n\mathrm{C}_n B^n E^0$ の項が現れるのを避けるために，

$(E+B)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k B^k E^{n-k}$ とはせず，$(E+B)^n=\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k B^k E^{n-k}+B^n+E^n$ とした。

補足 2

行列 A の n 乗（$n\geq 2$）が成り立つための条件

行列 $A\times B$ では，行列 A の各行と行列 B の各列の積の計算を行うから，

行列 A の列の数と行列 B の行の数が同じでなければならない（書けば自明である）。

よって，$(\text{行数},\text{列数})=(n,m)$ とすると，

$(n,m)\times(n,m)$ が成立するためには，$m=n$ でなければならない。

ゆえに，任意の行列を A とすると，A の n 乗（$n\geq 2$）が成り立つためには，

行列 A は正方行列でなければならない。

補足 2

(1)より $A^2=A$ であり，$A^k=A$ とすると $A^{k+1}=A^k\cdot A=A^2=A$ より，

帰納的に $A^n=A$ （$n=1,2,\cdots$）が成り立つ。

また，$BA=(E-A)A=A-A^2=A-A=O$

これと $B^n=B$ （$n=1,2,\cdots$）が成り立つことを示し，

$\therefore\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3}\right)^n(A+2B)^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ から求めてもよい。

というより，(1)の流れから出題者が期待しているのはこっちの解き方であろう。

$\boxed{4}$

(1)略解

$x+y=t\ (z=0, 0\leq t\leq 1)$ と $x=y\ (z=0)$ の交点を C とすると，$\mathrm{C}\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},0\right)$

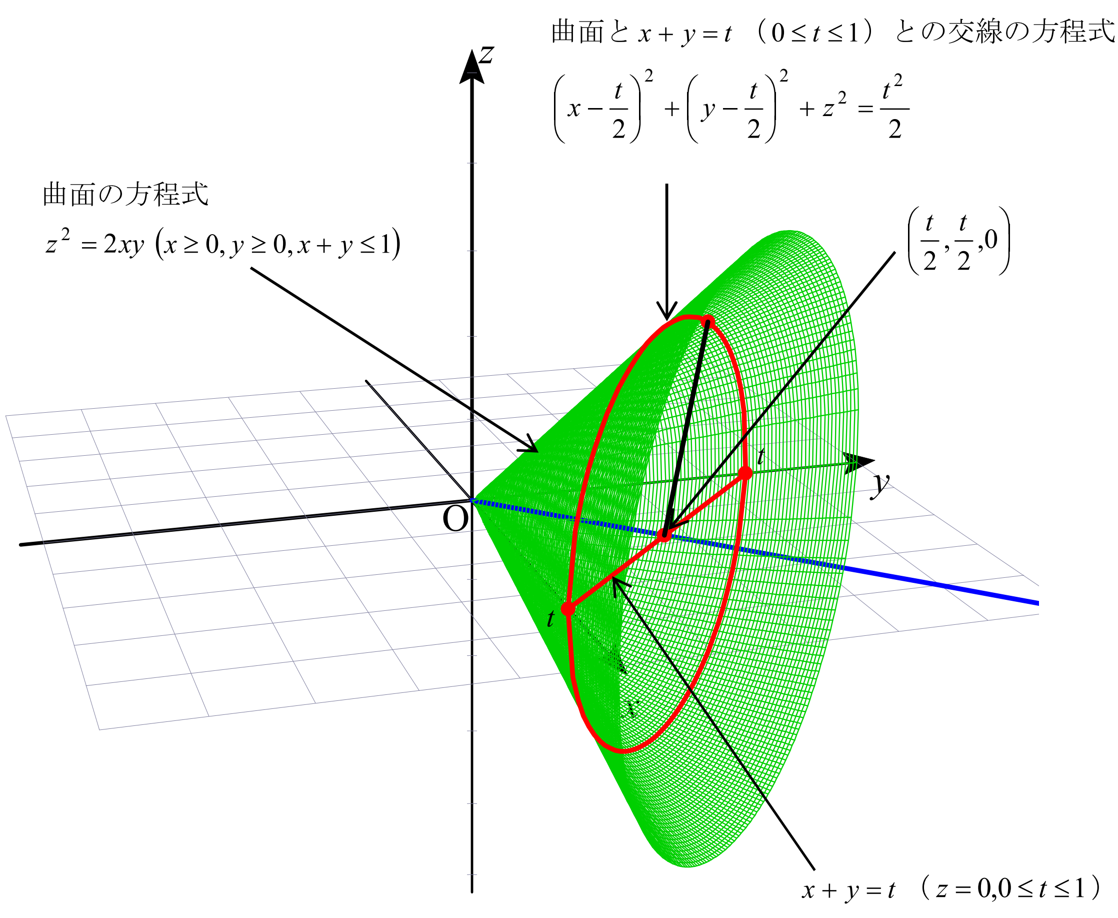
曲面と平面 $x+y=t$ との交線上の動点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると，動点 P は点 C を中心とする半径

$\frac{t}{\sqrt{2}}$ の円を描くから，その円の方程式は，$\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t}{2}\right)^2+z^2=\frac{t^2}{2}$

これと $x+y=t$ より，$\left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(y-\frac{x+y}{2}\right)^2+z^2=\frac{(x+y)^2}{2}$　$\therefore z^2=2xy$

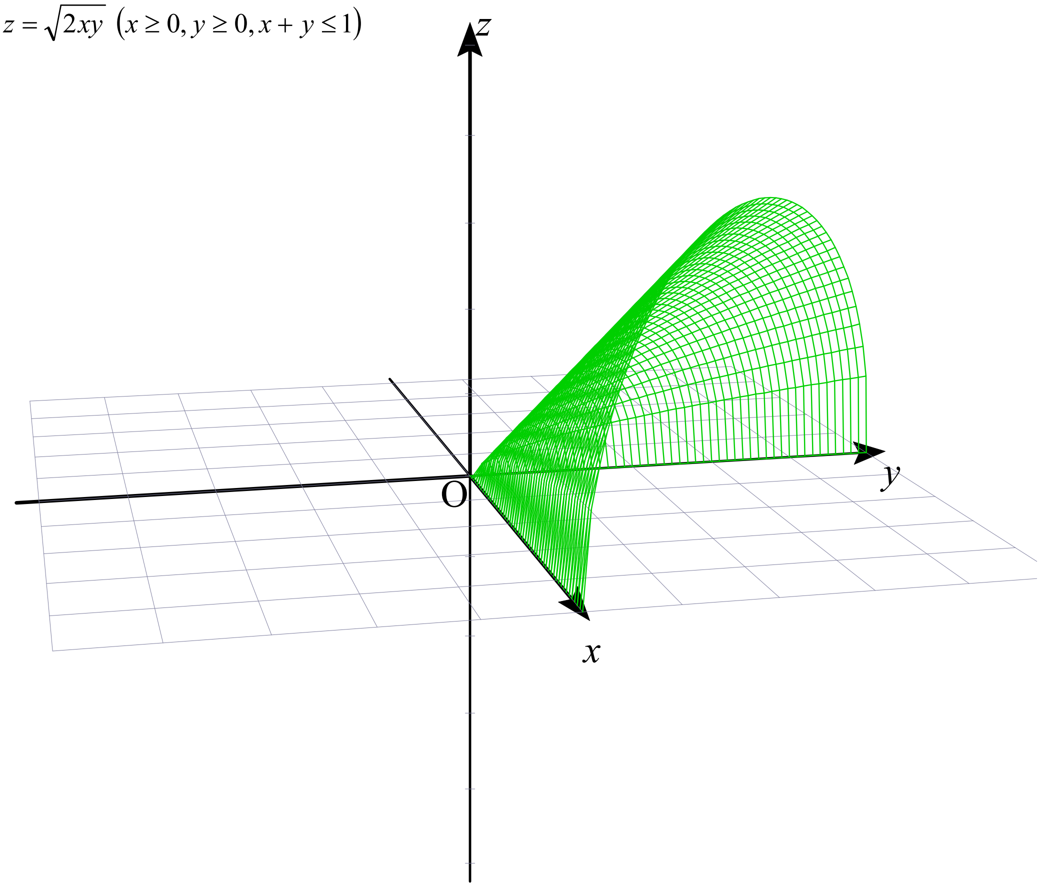
求めるのは，x,y,z がすべて 0 以上の場合だから，

求める曲面の方程式は，$z=\sqrt{2xy}$ （$x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1$）　・・・(答)



曲面の方程式

$z=\sqrt{2xy}\ \left(x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\right)$



(2)

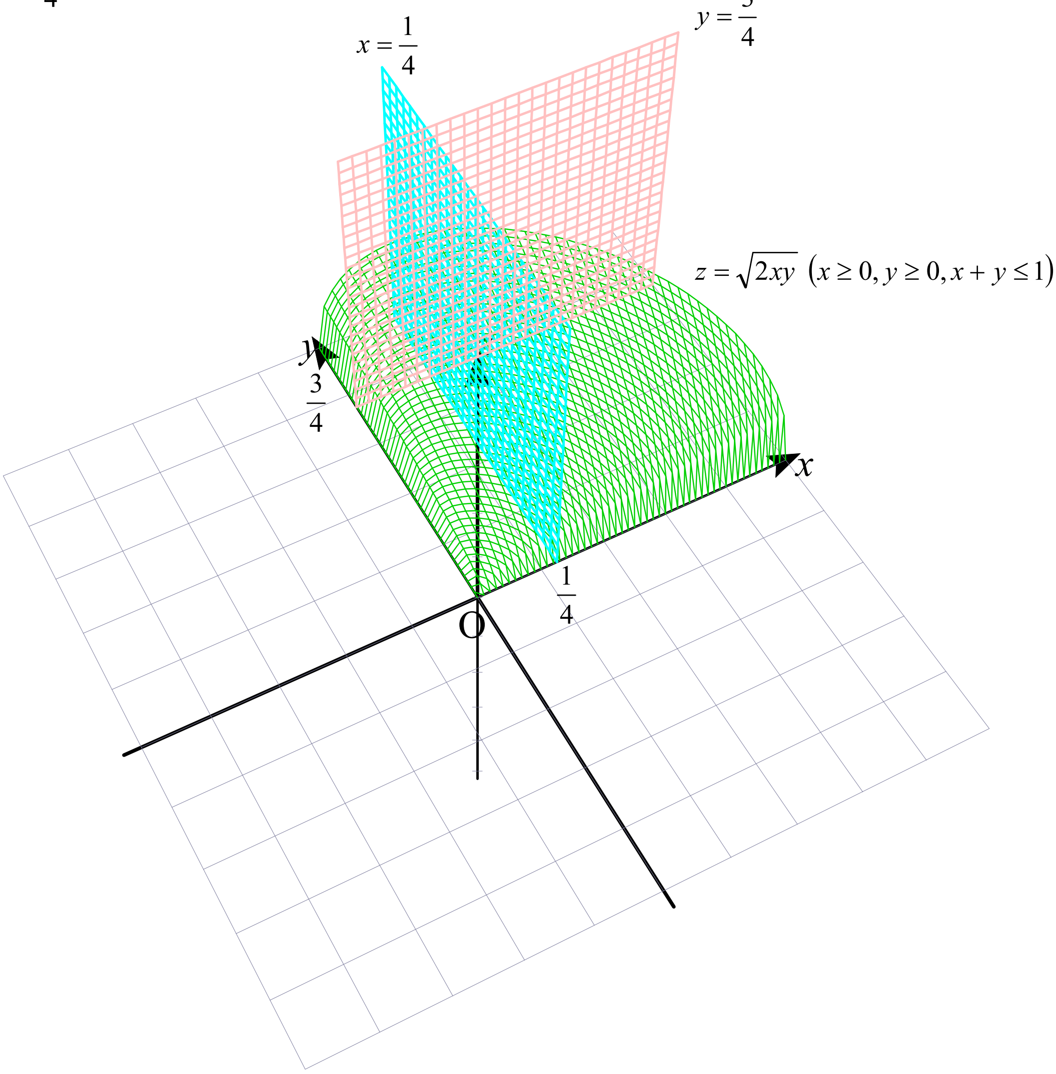
曲面 $z=\sqrt{2xy}$ と平面 $x=t$ （$0\leq t\leq\dfrac{1}{4}$）の交線の方程式は，$z=\sqrt{2ty}$ （$0\leq y\leq\dfrac{3}{4}$）

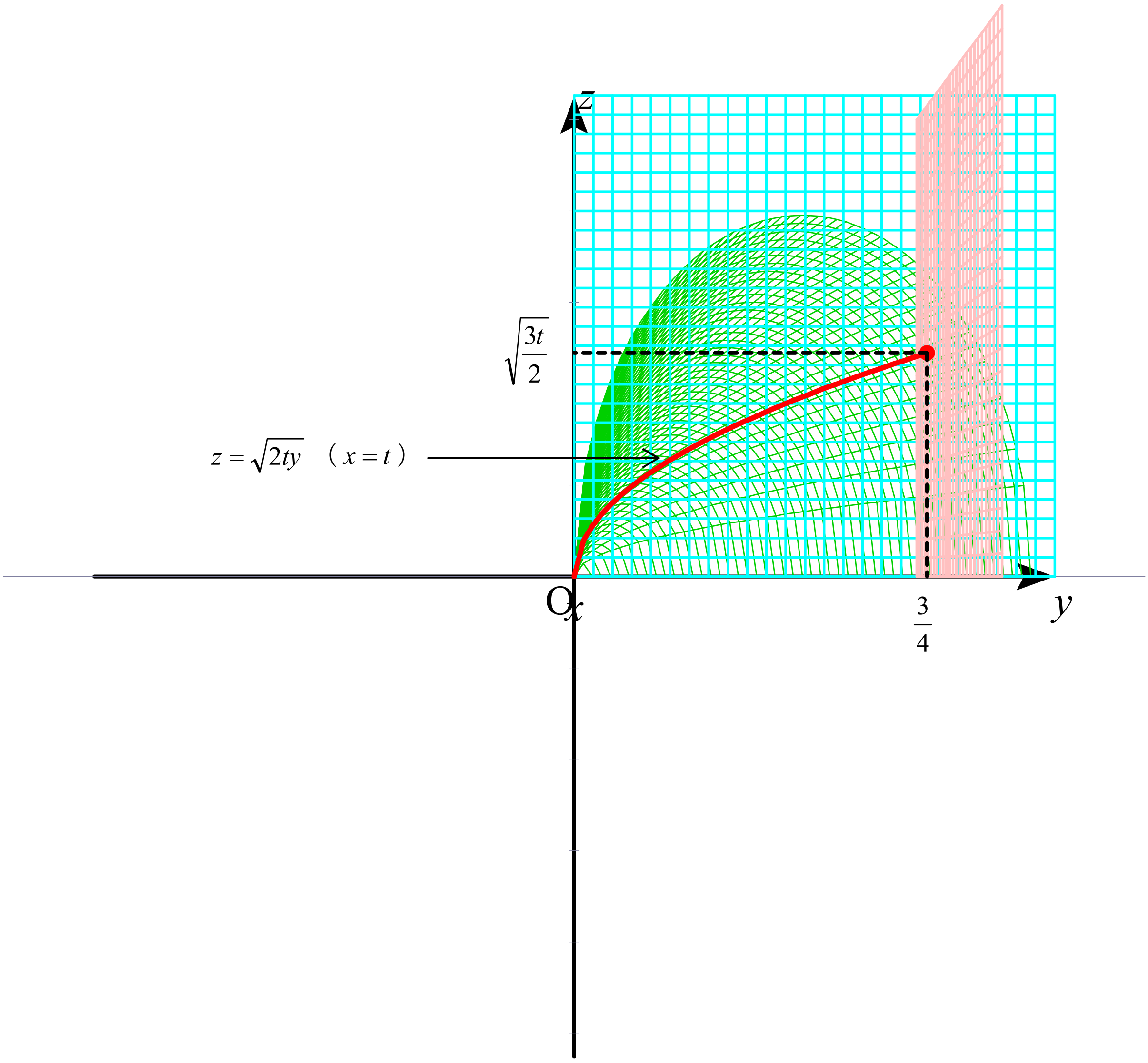
よって，領域 $0\leq z\leq\sqrt{2ty}$ （$0\leq y\leq\dfrac{3}{4}$）の面積，すなわち切り口の面積は，

$$S(t)=\int_0^{\frac{3}{4}}\sqrt{2ty}\,dy$$

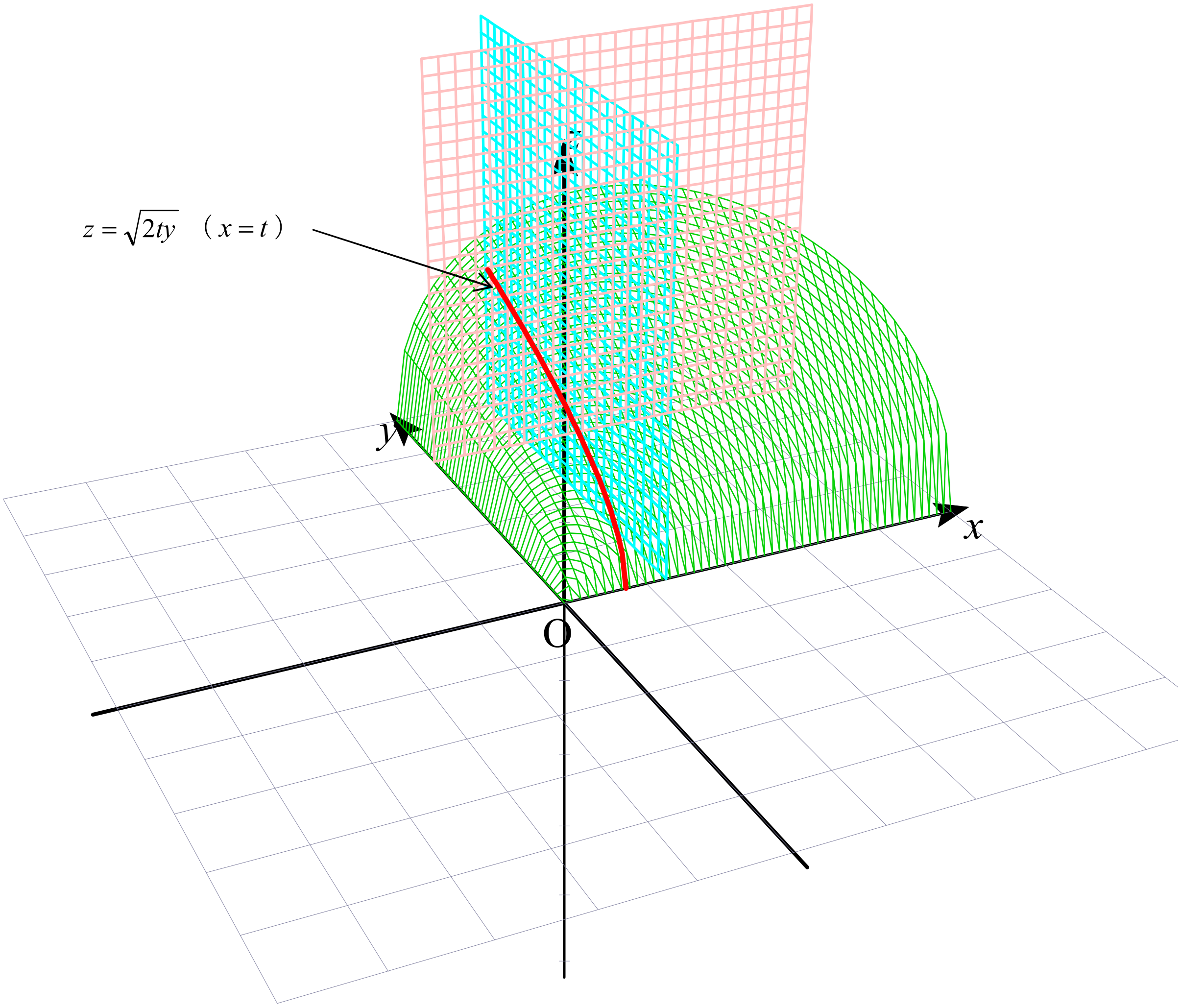
$$=\frac{2\sqrt{2t}}{3}\left[y\sqrt{y}\right]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{6t}}{4}\quad\cdot\cdot\cdot(答)$$





z
$\sqrt{\frac{3t}{2}}$
$z=\sqrt{2ty}$ （ $x=t$ ）
O
x
$\frac{3}{4}$
y



(3)

$0 \le t \le \dfrac{1}{4}$ より，領域 V の体積は,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} S(t)dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{6t}}{4}dt$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\left[t\sqrt{t}\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{48} \quad \cdot\cdot\cdot \text{(答)}$$